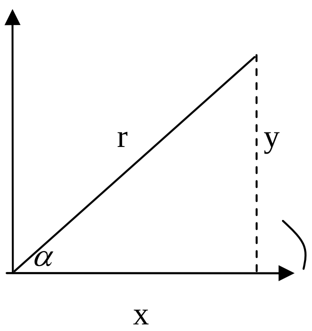
BAB VII. TRIGONOMETRI

Pengertian Sinus, Cosinus dan Tangen



Sin $\alpha = \dfrac{y}{r}$

Cos $\alpha = \dfrac{x}{r}$

Tan $\alpha = \dfrac{y}{x}$

Hubungan Fungsi Trigonometri :

1. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

2. $\tan \alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

3. $\sec \alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$

4. $\text{cosec } \alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$

5 . $\text{cotan } \alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

6. $\tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$

7. $\cot an^2 \alpha + 1 = \cos ec^2 \alpha$

Rumus-rumus Penjumlahan dan Pengurangan :

1. sin (A + B) = sin A cos B + cos A Sin B

2. sin (A - B) = sin A cos B - cos A Sin B

3. cos (A + B) = cos A cos B – sin A Sin B

4. cos (A - B) = cos A cos B + sin A Sin B

5. tan (A + B) = $\dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A . \tan B}$

6. tan (A - B) = $\dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A . \tan B}$

Rumus-rumus Sudut Rangkap :

1. sin 2A = 2 sin A cosA
2. cos 2A = $\cos^2$ A - $\sin^2$ A

3. tan 2A = $\dfrac{2\tan A}{1 - (\tan A)^2}$

Rumus Jumlah Fungsi :

Perkalian → jumlah/selisih

1. 2 sin A cos B = sin (A+B) + sin (A-B)
2 2 cos A sin B = sin (A+B) – sin (A-B)
3 2 cos A cos B= cos (A+B) + cos (A-B)
4. -2sin A sin B = cos (A+B) – cos(A-B)

Jumlah/selisih → perkalian

1. Sin A + sin B = 2 sin $\frac{1}{2}$ (A + B) cos $\frac{1}{2}$(A –B)

2. Sin A - sin B = 2 cos $\frac{1}{2}$ (A + B) sin $\frac{1}{2}$(A –B)

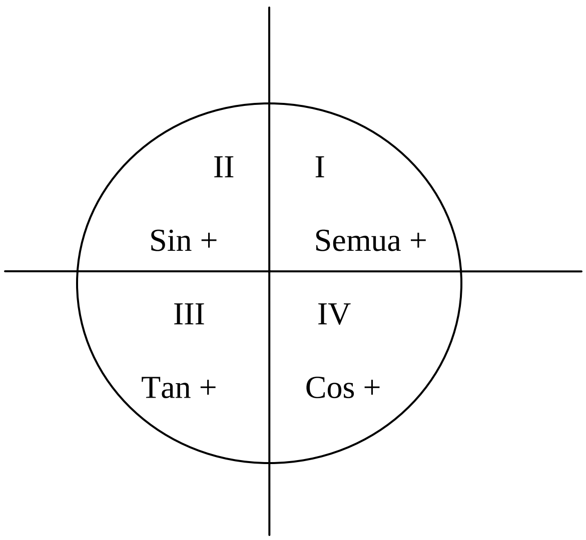
3. cos A + cos B = 2 cos $\frac{1}{2}$ (A + B) cos $\frac{1}{2}$(A –B)

4. cos A - cos B = - 2 sin $\frac{1}{2}$ (A + B) sin $\frac{1}{2}$(A –B)

Sudut-sudut istimewa :

α	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
Cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	~

Tanda-tanda fungsi pada setiap kuadrant :



	Kuadrant I α	Kuadrant II $180^0 - \alpha$	Kuadrant III $180^0 + \alpha$	Kuadrant IV $360^0 - \alpha$
Sin	+	+	-	-
Cos	+	-	-	+
Tan	+	-	+	-

Hubungan nilai perbandingan sudut di semua kuadrant:

Kuadrant I

Sin $(90^0 - \theta) = \cos\theta$

Cos $(90^0 - \theta) = \sin\theta$

tan $(90^0 - \theta) = \text{cotan}\ \theta$

Kuadratn II :

Sin $(180^0 - \theta) = \sin\theta$

Cos $(180^0 - \theta) = -\cos\theta$

tan $(180^0 - \theta) = -\tan\theta$

Kuadrant III :

Sin $(180^0 + \theta) = -\sin\theta$

Cos $(180^0 + \theta) = -\cos\theta$

tan $(180^0 + \theta) = \tan\theta$

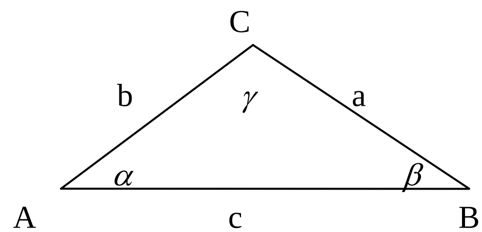
Kuadrant IV :

Sin $(360^0 - \theta) = -\sin\theta$

Cos $(360^0 - \theta) = \cos\theta$

tan $(360^0 - \theta) = -\tan\theta$

Aturan sinus dan cosinus



aturan sinus

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Aturan cosinus

1. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

2. $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

3. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

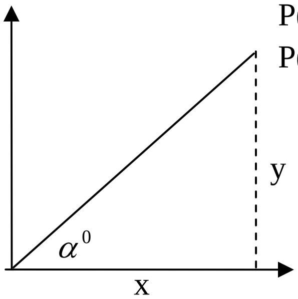
Luas Segitiga

Luas segitiga $= \frac{1}{2}\ ab\sin\gamma$

$= \frac{1}{2}\ ac\sin\beta$

$= \frac{1}{2}\ bc\sin\alpha$

Hubungan Koordinat Cartesius dan Koordinat Kutub :



P(x,y) → koordinat cartesius
P(r, α^0) → koordinat kutub

P (x,y) $\rightarrow$ P (r, α^0)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

α^0 didapat dari tan $\alpha^0 = \frac{y}{x}$

P (r, α^0) $\rightarrow$ P (x,y)

x = r cos α^0 ; y = r sin α^0

jadi , p (x,y) = p(r cos α^0, r sin α^0)

Nilai Maksimum dan Minimum

1. Jika y = k cos (x + nπ) dengan k > 0 maka

   a. maksimum jika y = k dimana cos (x + nπ) = 1
      sehingga (x + nπ)= 0
   b. minimum jika y = -k dimana cos (x + nπ) = -1
      sehingga (x + nπ)= π

2. Jika y = k sin (x + nπ) dengan k > 0 maka

   a. maksimum jika y = k dimana sin (x + nπ) = 1
      sehingga (x + nπ)= $\frac{\pi}{2}$
   b. minimum jika y = -k dimana sin (x + nπ) = -1
      sehingga (x + nπ)= $\frac{3\pi}{2}$

Persamaan dan pertidaksamaan Trigonometri

1. Persamaan

Rumus umum penyelesaian persamaan trigonometri adalah :

a. sin x = sin α , maka $x_1 = \alpha + k.360^0$
$x_2 = (180^0 - \alpha) + k.360^0$

b. cos x = cos α , maka $x_{1,2} = \pm\alpha + k.360^0$

c. tan x = tan α , maka x = α + k. 180^0

Persamaan umum trigonometri adalah :

a cos x + b sin x = c : dimana c = k cos (x - α)

dengan k = $\sqrt{a^2 + b^2}$:

persamaan lengkapnya:

a cos x + b sin x = k cos (x - α) = c

α didapat dari tan $\alpha = \frac{b}{a}$

Syarat agar persamaan a cos x + b sin x = c mempunyai jawaban adalah :

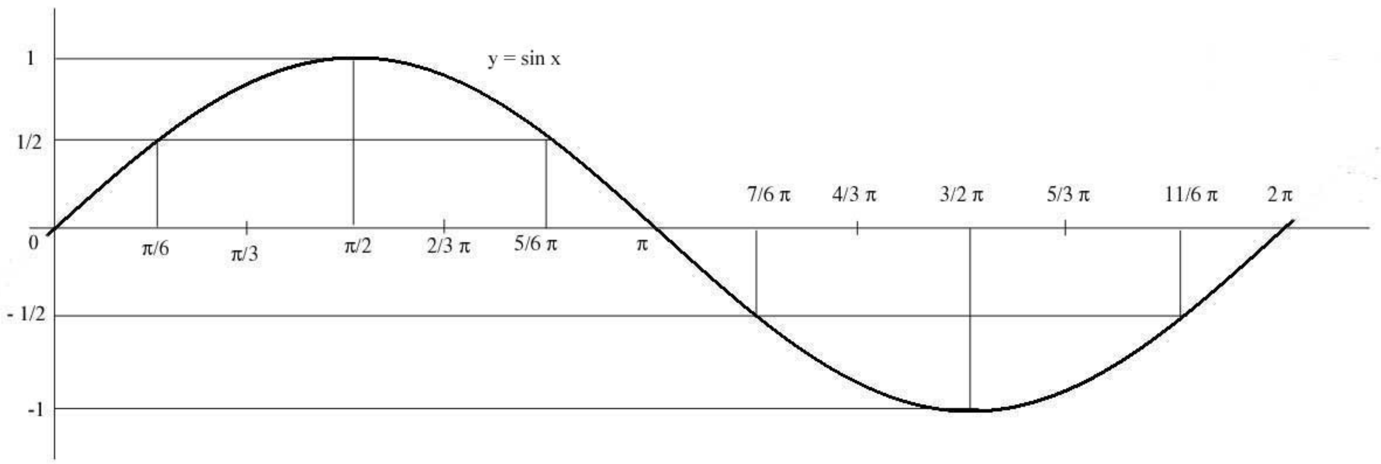
$c^2 \leq a^2 + b^2$

2. Pertidaksamaan

Pertidaksamaan-pertidaksamaan trigonometri seperti sin ax $\leq$ c, cos ax $\geq$ c dan sebagainya dapat diselesaikan dengan menggunakan langkah-langkah umum pertidaksamaan seperti :
- Diagram garis bilangan
- Grafik fungsi trigonometri

Fungsi Trigonometri:

1. Fungsi Sinus : f(x) = sin x

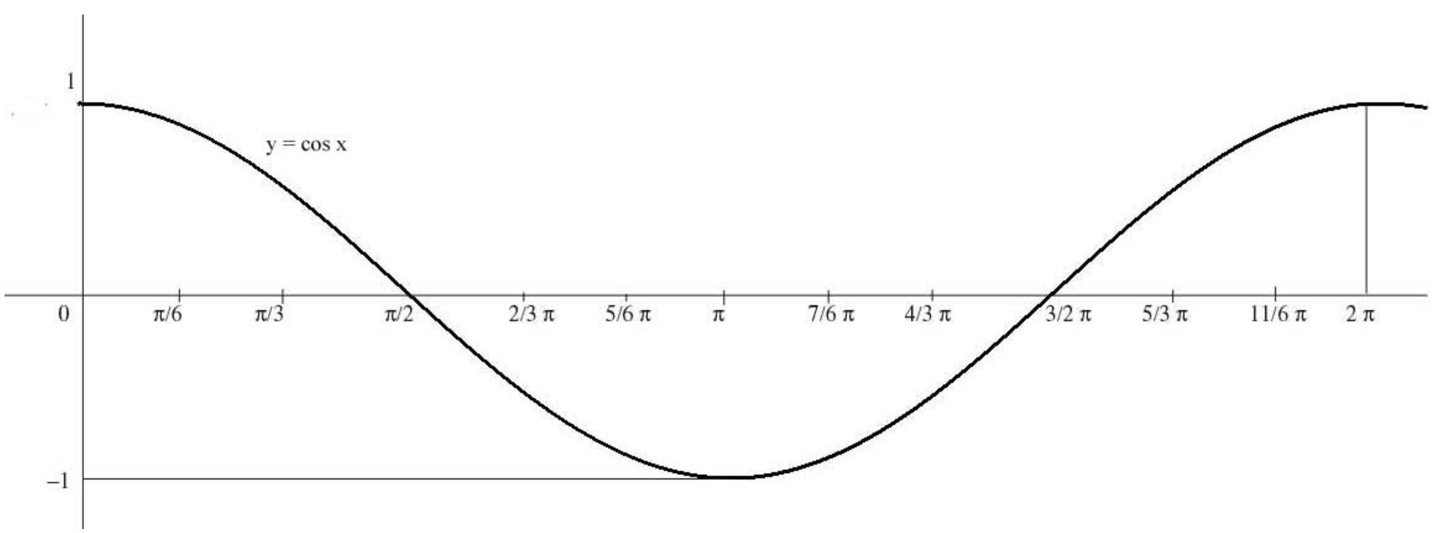


.

Ciri-ciri grafik fungsi sinus (sinusoida) y = sin x

a. Mempunyai nilai maksimum 1 dan nilai minimu -1
b. Mempunyai amplitudo → ½ (nilai maksimum – nilai minimum) = ½ (1 – (-1)) = ½ .(2) = 1
c. Memiliki Periode sebesar 2π
d. Periodisitas fungsi : sin (x + k.2π) = sin x, k $\in$ bilangan bulat

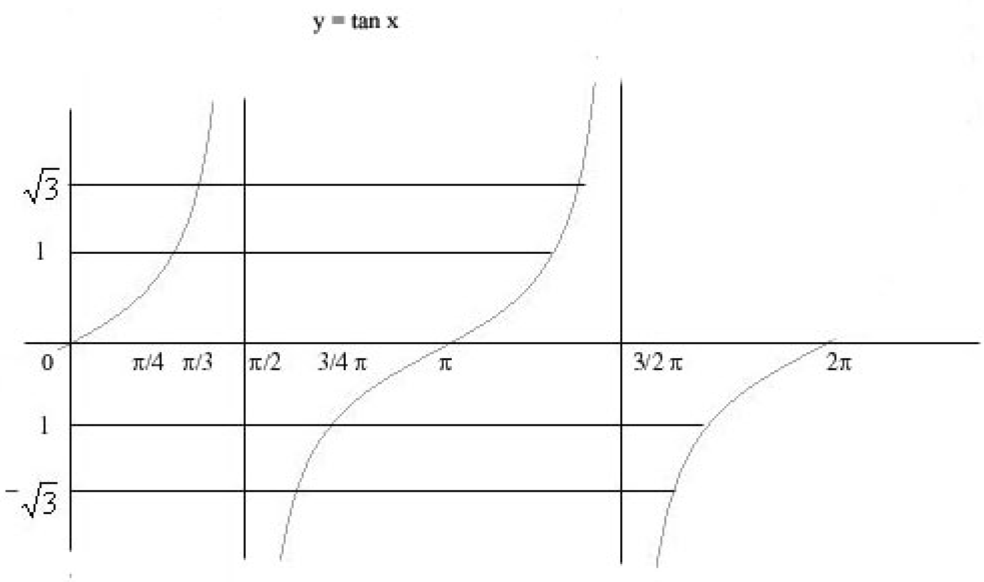
2. Fungsi Cosinus : f(x) = cos x



Ciri-ciri grafik fungsi cosinus : y = cos x

a. Mempunyai nilai maksimum 1 dan nilai minimu -1
b. Mempunyai amplitudo → ½ (nilai maksimum – nilai minimum) = ½ (1 – (-1)) = ½ .(2) = 1
c. Memiliki Periode sebesar 2π
d. Periodisitas fungsi : cos (x + k.2π) = cos x, k $\in$ bilangan bulat

2. Fungsi Tangen : f(x) = tan x



Ciri-ciri grafik fungsi y = tan x adalah :

a. Nilai maksimum = +~ (positif tidak terhinggaa) dan nilai minimum = - ~ (minus tak terhingga)

b. Mempunyai perioda sebesar π

c. Periodaisitas fungsi tan (x +k. π) = tan x, k $\in$ bilangan bulat