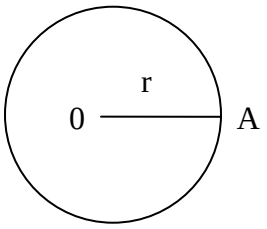
BAB XI. LINGKARAN

Pengertian :
Lingkaran adalah tempat kedudukan titik-titik yang berjarak konstan/sama terhadap sebuah titik tertentu. Sebuah titik tertentu itu disebut pusat lingkaran dan titik-titik yang berjarak sama itu disebut jari-jari (r).



Persamaan lingkaran:

1. Berpusat di O(0,0) dan berjari-jari r

$(x-0)^2 + (y-0)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$

Suatu titik A (a,b) dikatakan terletak :

a. pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = r^2$

b. di dalam lingkaran $x^2 + y^2 = r^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 < r^2$

c. di luar lingkaran $x^2 + y^2 = r^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 > r^2$

2. Berpusat di A(a,b) dan berjari-jari r

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

jika lingkaran berpusat di (a,b) :

a. Menyinggung sumbu X, maka r = |b|
b. Menyinggung sumbu Y, maka r = |a|
c. menyinggung garis Ax + By + C, maka

$$r = \left| \frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

3. 2 titik ujung diameternya diketahui (x_1, y_1) dan (x_2, y_2), maka persamaannya adalah :

$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$

Contoh soal:

1. Persamaan lingkaran yang berpusat di (0,0) dan berjari jari 2 adalah ….

jawab:

$(x-0)^2 + (y-0)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$

$x^2 + y^2 = 2^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$

Persamaan lingkarannya adalah:

$x^2 + y^2 = 4$

2. Persamaan lingkaran yang berpusat di (5,2) dan berjari-jari 4 adalah….

jawab:

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

$(x-5)^2 + (y-2)^2 = 4^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 - 4y + 4 = 16$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 10x - 4y + 25 + 4 - 16 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 10x - 4y + 13 = 0$

Jadi persamaan lingkarannya adalah:
$x^2 + y^2 - 10x - 4y + 13 = 0$

3. Persamaan lingkaran yang berpusat di (3,4) dan melalui titik (6,8) adalah….

jawab:

Diketahui a = 3 dan b = 4

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$
$(x-3)^2 + (y-4)^2 = r^2$

lingkaran melalui titik (5,2), maka titik tersebut berada pada lingkaran. Maukkan titik tersebut ke dalam persamaan lingkaran :

$(x-3)^2 + (y-4)^2 = r^2$
$(6-3)^2 + (8-4)^2 = r^2$
$3^2 + (-4)^2 = r^2$
$9 + 16 = r^2$
$25 = r^2$
$r = \sqrt{25} = 5$

r diketahui maka persamaan lingkarannya:

$(x-3)^2 + (y-4)^2 = r^2$
$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5^2$
$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 25$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 + 16 = 25$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25 - 25 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$

Jadi persamaan lingkarannya adalah:
$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$

4. Persamaan lingkaran berpusat di (3,5) dan menyinggung sumbu x adalah….

jawab:
diketahui a = 3 dan b= 5
Menyinggung sumbu x maka r = |b| = 5

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-5)^2 = 5^2$
$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 = 25$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 + 25 - 25 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$

maka persamaan lingkarannya adalah:

$x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$

Persamaan Umum Lingkaran :

Lingkaran dengan pusat (a,b) dan jari-jari r adalah

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

apabila dijabarkan diperoleh :

$\Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$

persamaan terakhir dapat disempurnakan menjadi persamaan berikut:

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

dengan $A = -2a \rightarrow a = -\frac{1}{2}A$

$B = -2b \rightarrow b = -\frac{1}{2}B$

$C = a^2 + b^2 - r^2 \rightarrow r^2 = a^2 + b^2 - C$

$\rightarrow r = \sqrt{a^2 + b^2 - C}$

$= \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$

Persamaan umum lingkaran adalah:
Pusat (a,b) dan jari-jari r atau

Pusat $(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B)$ dan $r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$

contoh soal:

1. Pusat dan jari-jari lingkaran $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13 = 0$ adalah…..

jawab:

Pusat $(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B)$ dan $r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \rightarrow$ persamaan umum lingkaran

$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13 = 0 \rightarrow$ persamaan lingkaran soal

maka diketahui A = 4, B = -6 dan C = 13

sehingga,

pusat $= (-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B) = (-\frac{1}{2}.4, -\frac{1}{2}.-6) = (-2,3)$

$$r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}.4^2 + \frac{1}{4}(-6)^2 - 13}$$

$$= \sqrt{4+9-13} = 0$$

Perpotongan Garis dan Lingkaran:

persamaan umum lingkaran:

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

garis g dengan persamaan:

$y = mx + n$

jika persamaan garis g disubstitusikan ke persamaan lingkaran diperoleh:

$x^2 + (mx + n)^2 + Ax + B(mx + n) + C = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + m^2x^2 + 2mnx + n^2 + Ax + Bmx + Bn + C = 0$
$\Leftrightarrow (1 + m^2)x^2 + (2mn + A + Bm)x + n^2 + Bn + C = 0$

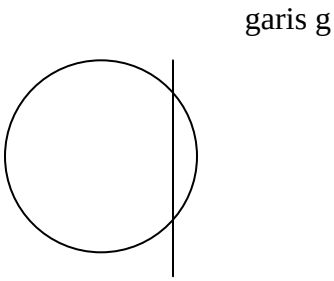
Diskriminan:

$D = b^2 - 4ac$

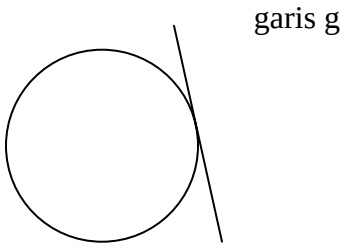
Dimana $b = 2mn + A + Bm$
$a = 1 + m^2$
$c = n^2 + Bn + C$

Ada 3 kemungkinan perpotongan garis g dengan lingkaran:

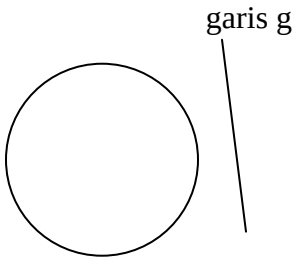
1. Apabila D>0
   garis g memotong lingkaran



2. Apabila D=0
   Garis g menyinggung lingkaran



3. Apabila D<0
   Garis g tidak memotong dan menyinggung lingkaran



contoh soal:

Diketahui sebuah lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ akan menyinggung garis $y = x + p$ apabila nilai p = ….

jawab:

cara 1:
Persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ …(1)
Persamaan garis $y = x + p$ …(2)

substitusi (2) ke (1) :
$x^2 + (x+p)^2 = 25$
$\Leftrightarrow x^2 + x^2 + 2xp + p^2 = 25$
$\Leftrightarrow 2x^2 + 2xp + p^2 - 25 = 0$ ….(3)

garis akan menyinggung lingkaran apabila diskriminan (D) persamaan (3)= 0

$D = b^2 - 4ac = 0$
$= (2p)^2 - 4.2.(p^2 - 25) = 0$
$4p^2 - 8p^2 + 200 = 0$

$-4p^2 + 200 = 0$
$4p^2 = 200$

$p^2 = 50$
$p = \sqrt{50}$
$= \pm 5\sqrt{2}$

Garis y = x + p akan menyingung lingkaran apabila
$p = \pm 5\sqrt{2}$

Cara 2 :

garis Ax + By + C akan menyinggung lingkaran maka

$$r = \left|\frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$$

persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 25$

$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 5^2$
a = 0, b= 0 dan r =5

persamaan garis y = x + p
→ x - y + p = 0
A = 1 ; B= -1 dan C = p

$$r = \left|\frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$$

$$5 = \left|\frac{1.0 + (-1).0 + p}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}}\right|$$

$$5 = \left|\frac{p}{\sqrt{2}}\right|;$$

karena nilai p adalah nilai mutlak maka ada 2 nilai :

$5 = \frac{-p}{\sqrt{2}}$ → $p = -5\sqrt{2}$ atau $5 = \frac{p}{\sqrt{2}}$ → $p = 5\sqrt{2}$

maka nilai yang memenuhi adalah:

$p = \pm 5\sqrt{2}$

Persamaan Garis Singgung Lingkaran

1. Garis singgung lingkaran melalui sebuah titik yang diketahui pada lingkaran

   a. Persamaan garis singgung melalui titik (x_1, y_1) pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ adalah :

   $x . x_1 + y. y_1 = r^2$

   b. Persamaan garis singgung melalui titik (x_1, y_1) pada lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ adalah :

   $(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = r^2$

   c. Persamaan garis singgung melalui titik (x_1, y_1) pada lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ adalah:

   $x . x_1 + y. y_1 + \frac{1}{2} A (x + x_1) + \frac{1}{2} B (y + y_1) + C = 0$

dari mana $\frac{1}{2}$ A dan $\frac{1}{2}$ B ? -awal dari persamaan lingkaran adalah Ax dan By - karena ada tambahan menjadi $x + x_1$ sehinga menjadi 2 kali maka A nya menjadi $\frac{1}{2}$ A demikian juga dengan B

contoh soal:

1. Persamaan garis singgung di titik (3,2) pada lingkaran $x^2 + y^2 = 13$ adalah…..

   jawab:

   $x . x_1 + y. y_1 = r^2$

   $. x_1 = 3$; $y_1 = 2$; $r^2 = 13$

   maka persamaan garis singgungnya adalah :

   $x . 3 + y . 2 = 13$
   $\Leftrightarrow 3.x + 2.y = 13$

2. Persamaan garis singgung melalui titik (5,1) pada lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ adalah….

jawab:

Cara 1:

Diketahui $x_1 = 5$; $y_1 = 1$; A = -4 ; B=6; C = -12

$$x \cdot x_1 + y \cdot y_1 + \frac{1}{2} A (x + x_1) + \frac{1}{2} B (y + y_1) + C = 0$$

$$5.x + y + \frac{1}{2} \cdot (-4)(x + 5) + \frac{1}{2} .6 (y+1) - 12 = 0$$

$5x + y - 2x - 10 + 3y + 3 - 12 = 0$

$3x + 4y - 19 = 0$

Persamaan garis singgungnya adalah =
$3x + 4y - 19 = 0$

Cara 2 :

$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$

cari pusat dan r:

$(x-2)^2 - 4 + (y+3)^2 - 9 - 12 = 0$

$(x-2)^2 + (y+3)^2 - 25 = 0$

$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$

atau :

Pusat $(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B)$ dan $r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$

A = -4; B = 6 ; C = -12

Pusat $(-\frac{1}{2}.-4, -\frac{1}{2}.6) = (2, -3) \rightarrow a = 2; b = -3$

$r = \sqrt{\frac{1}{4}(-4)^2 + \frac{1}{4}(6)^2 - (-12)} = \sqrt{4 + 9 + 12}$

$r = \sqrt{25} \Rightarrow r^2 = 25$

persamaan garis singgung:

$(x - a)(x_1 - a) + (y-b)(y_1 - b) = r^2$

diketahui a = 2 ; b = -3 ; $r^2 = 25$; $x_1 = 5$; $y_1 = 1$

$(x - 2)(5 - 2) + (y + 3)(1+3) = 25$

$(x - 2).3 + (y + 3)(4) = 25$

$3x - 6 + 4y + 12 - 25 = 0$

$3x + 4y - 19 = 0$

2. Garis singgung dengan gradien yang diketahui

a. jika garis y = mx + n menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ maka persamaan garis singgungnya adalah :

Lingkaran adalah berpusat di (0,0) sehingga persamaan garis singgungnya adalah:

$$y - 0 = m(x - 0) \pm r\sqrt{1+m^2}$$

$$\Leftrightarrow y = mx \pm r\sqrt{1+m^2}$$

b. jika garis y = mx + n menyinggung lingkaran

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, maka persamaan garis singgungnya adalah:

$$y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{1+m^2}$$

Contoh soal :

Persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 8 = 0$ dan sejajar garis $4x - 2y + 11 = 0$ adalah….

Jawab:

$$y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{1+m^2}$$

persamaan lingkaran : $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 8 = 0$

A = -6; B= 4 ; C = 8

Pusat $(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B)$ dan $r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$

Pusat $(-\frac{1}{2}.-6, -\frac{1}{2}.4) = (3,-2) \rightarrow a = 3; b=-2$

$r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C} = \sqrt{\frac{1}{4}(-6)^2 + \frac{1}{4}(4)^2 - 8}$

$= \sqrt{9 + 4 - 8} = \sqrt{5}$

Persamaan garis $4x - 2y + 11 = 0$

$4x + 11 = 2y \Leftrightarrow 2y = 4x+11 \Leftrightarrow y = 2x + \frac{11}{2}$

misal garis tersebut adalah a, maka didapat
Gradient garis a = $m_a = 2$,

Misal gradient garis singgung pada lingkaran = m_b
Karena sejajar maka $m_a = m_b$

catatan : $m_a . m_b = -1 \rightarrow$ tegak lurus

$y - b = m(x - a) \pm r \sqrt{1+m^2}$
$y - (-2) = 2 (x-3) \pm \sqrt{5} \sqrt{1+2^2}$
$y + 2 = 2x - 6 \pm \sqrt{5} . \sqrt{5}$
$y = 2x - 6 -2 \pm 5$
$y = 2x - 8 \pm 5$

maka persamaan garis singgung pada lingkarannya adalah :

$y = 2x - 8 + 5 = 2x - 3$ dan
$y = 2x - 8 - 5 = 2x - 13$

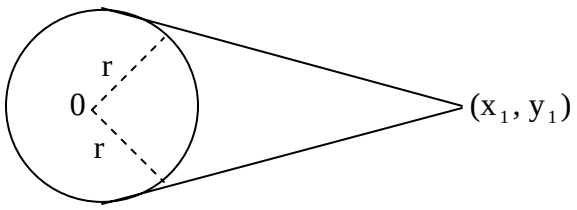
3. Garis singgung melalui sebuah titik yang berada di luar lingkaran.

misal: nilai koordinat titik tersebut adalah (x_1, y_1)
dan menyinggung lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$
, maka persamaan garis singgungnya adalah:

$y - y_1 = m (x - x_1)$

nilai m dan c didapat dari :

$y_1 - b = m (x_1 - a) + c$; dimana $c = r \sqrt{1+m^2}$



Contoh soal:

Persamaan garis singgung melalu titik (0,5) pada lingkaran $x^2 + y^2 = 20$ adalah…

jawab:

titik (0,5) berada di luar lingkaran :
karena $0^2 + 5^2 > 20$

persamaan garis singgung melalui titik (0,5):
$y = mx + c$
$x_1 = 0$; $y_1 = 5$
$y - y_1 = m (x - x_1)$;
$y - 5 = m(x-0)$
$y = mx+5 \rightarrow$ maka $c = 5$

cari nilai m

$y_1 - b = m (x_1 - a) + c$; dimana $c = r \sqrt{1+m^2}$
$c = r \sqrt{1+m^2} \Leftrightarrow c^2 = r^2 (1 + m^2)$

$25 = 20 (1+ m^2)$
$25 = 20 + 20m^2$
$5 = 20m^2$
$m^2 = \frac{1}{4}$
$m = \pm \frac{1}{2}$
masukkan ke dalam persamaan $y = mx+5$.

jika $m = \frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{1}{2}x + 5 \Leftrightarrow 2y = x + 10 \Leftrightarrow x - 2y = -10$

jika $m = -\frac{1}{2} \rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 5 \Leftrightarrow 2y = -x + 10 \Leftrightarrow x + 2y = 10$