BAB XII. SUKU BANYAK

Pengertian:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

adalah suku banyak (polinom) dengan :

- $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ adalah koefisien-koefisien suku banyak yang merupakan konstanta real dengan $a_n \neq 0$
- a_0 adalah suku tetap yang merupakan konstanta real
- n merupakan pangkat tertinggi dari x

Menghitung nilai suku banyak:

1. Metoda Substitusi :

Nilai suku banyak :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

untuk x = h adalah :

$$f(h) = a_n h^n + a_{n-1} h^{n-1} + a_{n-2} h^{n-2} + \ldots + a_2 h^2 + a_1 h + a_0$$

contoh:

jika $f(x) = 4x^3 + 2x^2 + x - 3$

nilai suku banyak untuk x = -2 adalah :

$$\begin{aligned} f(-2) &= 4 \cdot (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 + (-2) - 3 \\ &= -32 + 8 - 2 - 3 \\ &= -29 \end{aligned}$$

2. Metoda Horner:

Nilai suku banyak :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

untuk x = h adalah f(h) menggunakan Metoda Horner diperlihatkan sbb:

$$\begin{aligned} A_n &= a_n \\ A_{n-1} &= A_n . h + a_{n-1} \\ A_{n-2} &= A_{n-1} . h + a_{n-2} \ldots \\ &\ldots \\ &\ldots \\ A_2 &= A_3 . h + a_2 \\ A_1 &= A_2 . h + a_1 \\ A_0 &= A_1 . h + a_0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l|llllll} x = h & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} \; --- & a_2 & a_1 & a_0 \\ & & A_n.h & A_{n-1}.h & A_3.h & A_2.h & A_1.h \\ \hline & A_n & A_{n-1} & A_{n-2} & A_2 & A_1 & A_0 \longrightarrow f(h) \end{array}$$

Cara penyelesaian contoh metoda substitusi dapat diselesaikan dengan cara Horner sbb:

$$f(x) = 4x^3 + 2x^2 + x - 3$$

untuk x = -2 didapat :

$$\begin{array}{l|llll} x = -2 & 4 & 2 & 1 & -3 \\ & & -8 \; (+) & 12 \; (+) & -26 \; (+) \\ \hline & 4 & -6 & 13 & -29 \longrightarrow \text{hasil dari } f(-2) \end{array}$$

$\nearrow$ = kalikan dengan x = -2

didapat f(-2) = -29

Pembagian Suku Banyak:

1. Dengan Pembagian Biasa:

Sisa pembagian oleh $(x - h)$ terhadap

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

adalah $P(h)$ atau $f(x) = (x - h)\, H(h) + P(h)$

Dimana :

$(x - h)$ = pembagi
$H(h)$ = hasil bagi
$P(h)$ = sisa

Contoh sebelumnya :
Suku banyak $f(x) = 4x^3 + 2x^2 + x - 3$ dengan $x = -2$ atau $(x+2)$

$$
\begin{array}{lrl}
 & & (1)\quad (2)\quad (3) \\
 & & 4x^2 - 6x + 13 \\
 & x+2 \,\big/ & \overline{4x^3 + 2x^2 + x - 3} \\
(4x^2 \,.\, (x+2)) \rightarrow & & \underline{4x^3 + 8x^2} \quad - \\
 & & -6x^2 + x \\
(-6x \,.\, (x+2)) \rightarrow & & \underline{-6x^2 - 12x} \quad - \\
 & & \qquad 13x - 3 \\
(13 \,.\, (x+2)) \rightarrow & & \qquad \underline{13x + 26} \quad - \\
 & & \qquad\quad -29
\end{array}
$$

Hasil bagi = $H(h) = 4x^2 - 6x + 13$
Sisa = $P(h) = -29$

Proses pengerjaan:
urutan 1 : $4x^3$ dibagi dengan $x+2$ didapat $4x^2$
2 : kalikan $4x^2$ dengan $x+2$
didapat $4x^3 + 8x^2$
3 : kurangi $4x^3 + 2x^2$ dengan $4x^3 + 8x^2$
didapat $-6x^2$ kemudian turunkan x
sehingga menjadi $-6x^2 + x$
4 : bagi $-6x^2$ dengan $x+2$ didapat $-6x$
5 : kalikan $-6x$ dengan $x+2$
didapat $-6x^2 - 12x$
6 : Kurangi $-6x^2 + x$ dengan $-6x^2 - 12x$
didapat $13x$ kemudian turunkan -3
sehingga menjadi $13x - 3$
7 : bagi $13x$ dengan $x + 2$ didapat 13
8 : kalikan 13 dengan $x+2$ didapat
$13x + 26$
9 : Kurangi $13x - 3$ dengan $13x + 26$
didapat -29

didapat hasil bagi = $4x^2 - 6x + 13$ dengan sisa = -29

2. Pembagian suku banyak dengan cara Horner

a. Pembagian suku banyak dengan x - h

$f(x) = 4x^3 + 2x^2 + x - 3$ dibagi dengan $x+2$

$$
\begin{array}{l|cccc}
x = -2 & 4 & 2 & 1 & -3 \\
 & & -8\ (+) & 12\ (+) & -26\ (+) \\
\hline
 & 4 & -6 & 13 & -29
\end{array}
$$

Hasil bagi =: $4x^2 - 6x + 13$ dengan sisa = -29

b. Pembagian suku banyak dengan ax + b

Pembagian suatu suku banyak oleh $(ax + b)$ dinyatakan sebagai berikut :

Diketahui, $h = -\dfrac{b}{a}$ maka bentuk $(x - h)$ dapat dinyatakan sebagai :

$$x - h = \left(x - \left(-\frac{b}{a}\right) \right) = \left(x + \frac{b}{a} \right)$$

Pembagian suku banyak $f(x)$ oleh $\left(x + \dfrac{b}{a}\right)$ memberikan hubungan berikut.

$$f(x) = \left(x + \frac{b}{a}\right) H(h) + \text{sisa}$$
$$= \frac{1}{a}(ax + b)\, H(h) + \text{sisa}$$
$$= (ax + b)\, \frac{H(h)}{a} + \text{sisa}$$

Contoh :
Tentukan hasil bagi dan sisa dari
$12x^3 + 4x^2 - 27x - 9$ dibagi $(2x + 3)$

jawab:

$$
\begin{array}{l|cccc}
x = -\frac{3}{2} & 12 & 4 & -27 & -9 \\
 & & -18 & 21 & 9 \\
\hline
 & 12 & -14 & -6 & 0
\end{array}
\; +
$$

Jadi hasil baginya adalah $\frac{12x^2 - 14x - 6}{2}$

$= 6x^2 - 7x - 3$ dan sisanya adalah 0

c. Pembagian suku banyak dengan $ax^2 + bx + c$

Dengan cara pembagian biasa:

contoh:

$x^3 - x^2 + 4x - 4$ dibagi oleh $x^2 - 1$

(1) (2)

$$
\begin{array}{rl}
 & x - 1 \\
x^2 - 1 \,/ & x^3 - x^2 + 4x - 4 \\
(x \cdot (x^2 - 1)) \rightarrow & \underline{x^3 \qquad\quad - x} \quad - \\
 & -x^2 + 5x \\
(-1 \cdot (x^2 - 1)) \rightarrow & \underline{-x^2 \qquad\quad + 1} \quad - \\
 & 5x - 5
\end{array}
$$

(berderajat lebih kecil dari $x^2 - 1$, maka perhitungan selesai dan ini merupakan sisa)

Hasil bagi adalah $x - 1$ dan sisa $5x - 5$

Teorema Sisa:

Jika f(x) dibagi g(x) mempunyai hasil h(x) dan sisa s(x) ditulis :

f(x) = g(x) h(x) + s(x)

f(*x*) = suku banyak yang dibagi
g(x)= pembagi
h(*x*) = hasil bagi
s(x) = sisa pembagian
Jika f(*x*) berderajat *n* dan g(*x*) berderajat *m* ($m \le n$) maka derajat h(*x*) dan s(x) masing-masing sebagai berikut.

- derajat h(*x*) adalah ($n - m$)
- derajat maksimum s(x) adalah ($m - 1$)

- jika h(x) = ax +b maka s(x) = konstan
- jika g(x) = $ax^2 + bx + c$ maka s(x) = Ax + B

Apabila suku banyak f(x) :

- dibagi (x-a) maka sisanya adalah f (a).
- dibagi (ax-b) maka sisanya adalah f($\frac{b}{a}$)
- habis dibagi (x-a) maka f(a) = 0

Teorema Faktor:

- Jika pada suku banyak f(x) berlaku f(a)=0 , f(b) =0 dan f(c)= 0 maka f(x) habis dibagi (x-a) (x-b) (x –c)

- jika f(a) = 0 maka x-a adalah faktor dari f(x)

- jika (x-a) adalah faktor dari f(x) maka x = a adalah akar dari f(x)

Akar-akar Suku banyak

1. Jika x_1, x_2 dan x_3 adalah akar-akar persamaan $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ maka

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 x_2 x_3 = -\frac{d}{a}$$

2. Jika x_1, x_2, x_3 dan x_4 adalah akar-akar persamaan $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ maka

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 x_2 x_3 + x_1 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_4 + x_2 x_3 x_4 = -\frac{d}{a}$$

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = \frac{e}{a}$$

Akar-akar Rasional dari persamaan suku banyak:

Persamaan suku banyak :

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

dapat diselesaikan dengan mencari nilai pengganti x yang memenuhi persamaan suku banyak itu. Nilai x tersebut dinamakan penyelesaian atau akar persamaan suku banyak tersebut.

Jika f(x) adalah suku banyak maka (x-h) merupakan faktor dari f(x) jika h adalah akar dari persamaan suku banyak $f(x) = 0$.

Akar-akar persamaan suku banyak f(0) dapat dicari dengan menggunakan urutan langkah-langkah sbb:

1. Menentukan akar-akar yang mungkin dari $f(x) = 0$,

   yaitu $\frac{m}{n}$,

   dimana:
   m = factor bulat positif dari a_0
   n = factor bulat dari a_0

2. Akar-akar yang sebenarnya harus memenuhi $f\left(\frac{m}{n}\right) = 0$

Contoh:

$f(x) = x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = 0$ maka

$a_n = 1$ dan $a_0 = 24$

m = faktor bulat positif dari $a_0 = 24$,
yaitu 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24
n = faktor bulat dari a_0 yaitu , -1, 1, -2,2, -3,3, -6,6, -8,8
-12, 12, -24,24

akar yang mungkin adalah$\left(\frac{m}{n}\right)$: 1,-1,2,-2,3,-3,4,-4, 6,-6 ,8,-8

substitusikan akar yang mungkin ke dalam persamaan apakah $f\left(\frac{m}{n}\right) = 0$?

Karena soal berderajat 4 maka cari minimal 2 nilai akar terlebih dahulu:

ambil nilai x=1 :

$f(1) = 1 – 15 – 10 + 24 = 0 \rightarrow x = 1$ adalah akar persamaan

ambil nilai x = 2

$f(2) = 16 – 60 – 20 + 24 = -40 \rightarrow x= 2$ bukan akar

ambil nilai x = -2

$f(-2) = 16 - 60 + 20 + 24 = 0 \rightarrow x = -2$ adalah akar persamaan

didapat dua nilai yaitu x = 1 dan x = -2

kalikan dua nilai sbb:

$(x-1)(x+2) = x^2 + x - 2$

Bagi persamaan dengan nilai tsb :

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - x - 12 \\
\hline
x^2 + x - 2 & x^4 - 15x^2 - 10x + 24 \\
 & \underline{x^4 + x^3 - 2x^2} \quad - \\
 & -x^3 - 13x^2 - 10x \\
 & \underline{-x^3 - x^2 + 2x} \quad - \\
 & -12x^2 - 12x + 24 \\
 & \underline{-12x^2 - 12x + 24} \quad - \\
 & 0
\end{array}
$$

(sisa 0)

sehingga hasil akhirnya didapat :

$f(x)= (x-1)(x+2)(x^2 -x -12) = 0$ atau

$(x-1)(x+2) (x -4) (x +3) = 0$

didapat akar-akar persamaan :

x = 1 ; x = -2 ; x= -3 dan x = 4