BAB XVIII. NOTASI SIGMA, BARISAN, DERET DAN INDUKSI MATEMATIKA

Notasi Sigma :

$\sum$ adalah notasi sigma, digunakan untuk menyatakan penjumlahan berurutan dari suatu bilangan yang sudah berpola.
$\sum$ merupakan huruf capital "S" dalam abjad Yunani adalah huruf pertama dari kata SUM yang berarti jumlah.

Bentuk umum notasi sigma:

$$\sum_{i=1}^{n} U_i = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$$

$\sum_{i=1}^{n} U_i$ dibaca penjumlahan suku U_i untuk i=1 sampai dengan i=n

i = indeks penjumlahan
i =1 disebut batas bawah penjumlahan
i = n disebut batas atas penjumlahan
{1,2,3,…,n} adalah wilayah penjumlahan

Contoh:

2 + 4 + 6 + 8 + 10 + … + 100 dapat ditulis dengan notasi sigma yaitu $\sum_{i=1}^{50} 2i$

Sifat-sifat notasi sigma:

1. $\sum_{i=1}^{n} U_i = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$

2. $\sum_{i=1}^{n} U_i = \sum_{k=1}^{n} U_k$

3. $\sum_{i=1}^{n} K = nK$; dimana K adalah konstanta

4. $\sum_{i=1}^{n} KU_i = K\sum_{i=1}^{n} U_i$

5. $\sum_{i=1}^{n} (U_i \pm V_i) = \sum_{i=1}^{n} U_i \pm \sum_{i=1}^{n} V_i$

6. $\sum_{i=1}^{n} U_i = \sum_{i=0}^{n-1} U_{i+1} = \sum_{i=2}^{n+1} U_{i-1}$

7. $\sum_{i=1}^{n} U_i = \sum_{i=1}^{m} U_i + \sum_{i=m+1}^{n} U_i$; dimana 1< m < n

8. $\sum_{i=m}^{n} U_i = \sum_{i=m+p}^{n+p} U_{i-p} = \sum_{i=m-p}^{n-p} U_{i+p}$

9. a. $\sum_{i=1}^{n} (U_i + V_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} U_i^{\,2} + 2\sum_{i=1}^{n} U_i V_i + \sum_{i=1}^{n} V_i^{\,2}$

   b. $\sum_{i=1}^{n} (U_i - V_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} U_i^{\,2} - 2\sum_{i=1}^{n} U_i V_i + \sum_{i=1}^{n} V_i^{\,2}$

Barisan dan Deret Aritmetika (Deret Hitung):

Suatu barisan $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_{n-1}, U_n$ disebut barisan aritmetika jika selisih dua suku sebelum dan sesudahnya tetap, dimana selish tersebut dinamakan beda (b).

$b = U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = U_n - U_{n-1}$

Bentuk umum barisan aritmetika :

a , a+b, a +2b,…, a+(n-1)b

Bentuk umum deret aritmetika:

a + (a+b) + (a+2b) +… + {a+(n-1)b}

dimana:

a = suku pertama
b = beda
n = banyak suku

Rumus-rumus :

1. Suku ke n barisan aritmetika (U_n) ditulis sbb:

$U_n = a + (n-1)\, b$

2. Jumlah n suku pertama deret aritmetika (S_n) ditulis sbb:

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n = \frac{n}{2}(a + U_n)$$

$$= \frac{n}{2}(2a + (n-1)\, b)$$

hubungan U_n dan S_n adalah:

$U_n = S_n - S_{n-1}$

3. Jika n ganjil, maka suku tengah barisan aritmetika (U_t) ditulis sbb:

$$U_t = \frac{1}{2}(a + U_n)$$

Sisipan:

Suatu barisan aritmetika :

a , a+b, a +2b,…, a+(n-1)b

apabila diantara dua suku disisipkan k buah bilangan , maka barisan aritmetika yang baru adalah sbb:

$a \;, \underbrace{(a+b'), (a+2b'),\ldots,(a+kb')}_{\text{k buah bilangan sisipan}}, \{a+(k+1)b'\},\ldots$

U_1 barisan lama $\qquad$ U_2 barisan lama

dengan b' = beda baru setelah ada k bilangan sisipan

1. Beda barisan baru (b')
   hubungan barisan baru dan lama :
   $a + b = a + (k+1)\, b'$
   $b = (k+1)\, b'$

$$b' = \frac{b}{k+1}$$

b = beda deret lama
b' = beda deret baru
k = banyaknya bilangan yang disisipkan

2. Menentukan banyaknya suku baru (n')
   Barisan lama : $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_{n-1}, U_n$

   Barisan baru: $U_1, \ldots, U_2, \ldots, U_3, \ldots, U_4, \ldots\, U_n$

   k suku k suku k suku k suku

dari barisan baru dapat dilihat bahwa $U_n' = U_n$

a. jika banyaknya suku =2

$U_1, \ldots, U_2$

k suku

banyaknya suku baru: $n' = 2 + k = 2 + (2-1)k$

b. jika banyaknya suku =3

$U_1, \ldots, U_2, \ldots, U_3$

k suku k suku

banyaknya suku baru: $n' = 3 + 2k = 3 + (3-1)k$

c. . jika banyaknya suku =4

$U_1, \ldots, U_2, \ldots, U_3, \ldots, U_4$

k suku k suku k suku

banyaknya suku baru: $n' = 4 + 3k = 3 + (4-1)k$

Jadi, jika banyaknya suku adalah n buah maka banyaknya suku baru adalah:

$$n' = n + (n-1)\, k$$

3. Jumlah n suku setelah sisipan (S_n')

$$S_n' = \frac{n'}{2}(a + U_n') \text{ atau } S_n' = \{\frac{n'}{2}(2a + (n'-1)\, b'\}$$

$U_n' = U_n$ maka,

$$S_n' = \frac{n'}{2}(a + U_n)$$

contoh soal sisipan :

1. Antara bilangan 60 dan 110 disisipkan 10 bilangan sehingga bersama kedua bilangan semula terbentuk deret aritmetika. Tentukan jumlah deret yang terbentuk .

jawab:

banyaknya suku awal = 2 → n
deret setelah sisipan 60+ … + 110

$\downarrow$

10 bilangan

Banyaknya suku baru: $n' = n+(n-1)k$
$= 2+(2-1)10 = 12$

Jumlah deret yang terbentuk :

$$S_n' = \frac{n'}{2}(a + U_n)$$
$$= \frac{12}{2}(60+110)$$
$$= 1020$$

2. Diantara dua suku berurutan pada barisan 5, 15, 25,… disisipkan 4 bilangan sehingga membentuk barisan aritmetika yang baru . Tentukan jumlah 10 suku pertama dari barisan yang terbentuk

Jawab:

dari barisan 5, 15, 25,…
diketahui a = 5
b = 10
k = 4

beda barisan yang baru:

$$b' = \frac{b}{k+1}$$
$$= \frac{10}{4+1} = 2$$

Jumlah 10 suku pertama barisan yang terbentuk :

$$S_n' = \{\frac{n'}{2}(2a + (n'-1)\, b')\}$$

$$S_{10} = \frac{10}{2}\{2.5+(10-1)2\} = 5(10+18) = 140$$

Barisan dan Deret Geometri (Deret Hitung):

Suatu barisan $U_1, U_2, U_3, \dots, U_{n-1}, U_n$ disebut barisan geometri jika perbandingan antara dua suku sebelum dan sesudahnya selalu tetap, perbandingan dua suku tersebut disebut pembanding atau rasio (r).

Jadi $r = \dfrac{U_2}{U_1} = \dfrac{U_3}{U_2} = \dots = \dfrac{U_n}{U_{n-1}}$

Bentuk umum barisan geometri:
$a, ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^{n-1}, ar^n$

Bentuk umum deret geometri:

$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + ar^n$

a = suku pertama
n = banyaknya suku
r = rasio

Rumus-rumus:

1. Suku ke n barisan geometri (U_n) ditulis sbb:
   $U_n = ar^{n-1}$

2. Jumlah n suku pertama deret geometri (S_n) ditulis sbb:

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1} \quad \text{untuk } r > 1$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad \text{untuk } r < 1$$

Hubungan U_n dan S_n

$U_n = S_n - S_{n-1}$

3. Untuk n ganjil, maka suku tengah barisan geometri (U_t) adalah :

   $U_t = \sqrt{a.U_n}$

Sisipan:

Suatu barisan geometri:

$a, ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^{n-1}, ar^n$

apabila diantara dua suku disisipkan k buah bilangan , maka barisan geometri yang baru adalah sbb:

$$\underset{\downarrow}{a},\ \underbrace{ar',\ a(r')^2,\ a(r')^3,\dots,\ a(r')^k}_{\text{k buah bilangan sisipan}},\ \underset{\downarrow}{a(r')^{k+1}},\dots$$

U_1 barisan lama $\qquad\qquad$ U_2 barisan lama

r' = rasio baru setelah ada k bilangan sisipan

1. Banyaknya suku baru:

$$n' = n + (n-1)\,k$$

2. Rasio baru (r') :
   hubungan rasio lama dan baru

$$ar = a(r')^{k+1}$$

$$r = (r')^{k+1}$$

$$r' = \sqrt[k+1]{r}$$

r = rasio lama ; k = banyaknya suku baru yang disisipkan

3. Jumlah n suku setelah sisipan (S_n'):

Jumlah n suku pertama setelah sisipan :

$$S_n' = \frac{a[(r')^{n'} - 1]}{r' - 1}\ ;\ r' > 1 \quad \text{atau}$$

$$S_n' = \frac{a[1-(r')^{n'}]}{1-r'}\ ;\ r' < 1$$

Contoh soal sisipan:

Diantara bilangan 48 dan 768 disisipkan 3 buah bilangan sehingga terbentuk barisan geometri. Tentukan rasio dan jumlah barisan setelah sisipan.

Jawab:

Barisan baru : $48,\ \underbrace{\text{sisipan1, sisipan2, sisipan3}}_{\text{3 sisipan}},\ 768$

Banyaknya suku barisan lama n = 2
banyaknya suku barisan baru :
$n' = n + (n-1)\,k = 2 + (2-1)3 = 5$

rasio barisan lama , $r = \frac{768}{48} = 16$

Rasio barisan baru, $r' = \sqrt[k+1]{r}$

$$= \sqrt[3+1]{16}$$
$$= \sqrt[4]{2^4} = 2$$

Barisan geometri tak hingga:

Deret geometri yang banyak suku-sukunya tak terbatas /tak hingga dinamakan deret geometri tak hingga.

Deret : $a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + ar^n$ disebut deret terhingga dengan n suku.

Deret : $a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$
disebut deret tak hingga (n nya tak hingga)

Jumlah n suku pertama deret geometri tak hingga :

1. Bila |r| < 1 atau -1 < r < 1

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$; dinamakan konvergen (mempunyai nilai)

2. Bila |r| > 1
   $S_\infty = \infty$; dinamakan divergen (tidak mempunyai nilai)

Contoh deret tah hingga:

1. Diketahui deret geometri : $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \dots$
   Berapakan jumlah deret tsb?

   jawab:

Diketahui : $a = \frac{1}{2}$; $r = \frac{1/8}{1/2} = \frac{1}{4}$

$r = \frac{1}{4}$ memenuhi syarat $|r| < 1$ atau $-1 < r < 1$, maka konvergen.

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{1/2}{1-1/4} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

2. Apabila suatu deret geometri tak hingga mempunyai jumlah 10 dengan suku pertamanya adalah 5. Berapa rasio dan jumlah 5 suku pertama dari deret tersebut ?

jawab:

diketahui $S_\infty = 10$; $a = 5$

karena $S_\infty = 10$ maka deret tak hingga ini adalah konvergen.

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

$$10 = \frac{5}{1-r} \; ; \; 1 - r = \frac{5}{10}$$

$$1 - r = \frac{1}{2} ; \quad r = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Jadi rasionya: $r = \frac{1}{2}$

jumlah 5 suku pertamanya:

Karena $r < 1$ maka

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r}(1 - r^n) = S_\infty (1 - r^n)$$

$$S_5 = 10 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5\right] = 10\left(1 - \frac{1}{32}\right)$$

$$= 10 \cdot \frac{31}{32} = \frac{310}{32} = 9\frac{22}{32}$$

Induksi Matematika:

Induksi matematika adalah suatu cara pembuktian suatu pernyataan umum mengenai deret yang berlaku untuk setiap bilangan asli.

Langkah-langkah pembuktian dengan induksi matematika adalah:

1. Buktikan bahwa pernyataan benar untuk $n = 1$
2. Buktikan bahwa pernyataan benar untuk $n = k$
3. Buktikan bahwa pernyataan juga benar untuk $n = k+1$

contoh induksi matematika:

1. Buktikan
$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(1+n)$

langkah 1 :

untuk $n = 1$
masukkan nilai $n = 1$
$2n = n(1+n)$
$2.1 = 1(1+1)$
$2 = 2 \rightarrow$ terbukti

langkah 2 :

untuk $n = k$
misalkan rumus berlaku untuk $n = k$ maka rumus menjadi

$2 + 4 + 6 + \dots + 2k = k(1+k)$

langkah 3 :

untuk $n = k+1$
berdasarkan langkah 2

$2 + 4 + 6 + \dots + 2k = k(1+k)$

jika $n = k+1$ didapat :

$$\underbrace{2 + 4 + 6 + \dots + 2k}_{k(1+k)} + 2(k+1) = k(1+k) + 2(k+1)$$

Catatan: Rumus kanan awal : $n(1+n)$, kita masukkan $n = k+1$ Menjadi $(k+1)(1+(k+1)) = (k+1)(k+2) \rightarrow$ ini yang akan dibuktikan

ruas kanan dijabarkan

k (1+k) + 2 (k+1) = k + k^2 + 2k +2

= k^2 + 3k +2

= (k+1)(k+2) → terbukti

2. Buktikan

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m(m+1)} = \frac{n}{n+1}$$

jawab:
Nilai m dimasukkan menjadi

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

langkah 1 :

Untuk n = 1
masukkan n=1 ruas kiri dan kanan

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$\frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{1+1}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow \text{terbukti}$$

Langkah 2:

Untuk n = k

Misalkan rumus berlaku untuk n=k rumus menjadi

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

Langkah 3 :

Untuk n = k+1

Berdasarkan langkah 2 :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

jika n = k +1 didapat :

$$\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)}}_{\frac{k}{k+1}} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

Catatan:

Rumus kanan awal : $\frac{n}{n+1}$, kita masukkan n = k+1

Menjadi $\frac{k+1}{k+1+1} = \frac{k+1}{k+2}$ → ini yang akan dibuktikan

ruas kanan dijabarkan :

$$\frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k(k+2)}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{\cancel{(k+1)}(k+1)}{\cancel{(k+1)}(k+2)}$$

$$= \frac{k+1}{k+2} \rightarrow \text{terbukti}$$