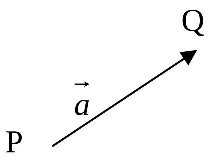
BAB XX. VEKTOR

A Definisi Vektor :
Vektor adalah besaran yang mempunyai besar dan arah.

Vektor $\overrightarrow{PQ}$ mempunyai titik pangkal P dan titik ujung Q.



B. Beberapa pengertian vektor :

1. Vektor posisi adalah suatu vektor yang titik awalnya di 0.

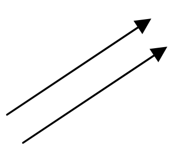
   Jika A(x,y,z) maka $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dan

   $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

2. Vektor satuan adalah suatu vektor panjangnya satu. Vektor arah sumbu x, sumbu y dan sumbu z berturut-turut adalah :

   $\dot{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Vektor posisi adalah suatu vektor yang titik awalnya di 0.
   Dua buah vektor dikatakan sama jika kedua vektor itu mempunyai besar dan arah yang sama.



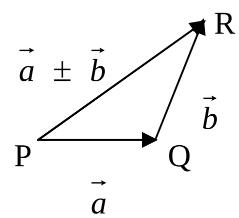
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{matrix}$$

C. Operasi Vektor

1. Penjumlahan dan pengurangan vektor

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ a_3 \pm b_3 \end{pmatrix}$$

untuk penjumlahan :



$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$$

2. Perkalian skalar dengan vektor

$$k\,\vec{a} = k\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{pmatrix}$$

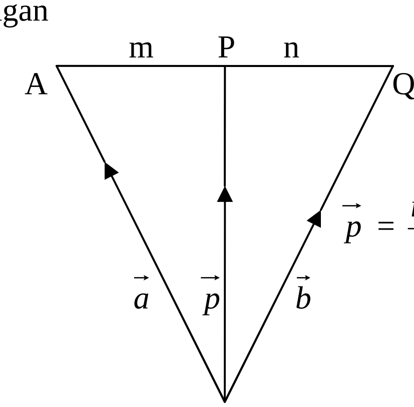
3. Besar atau panjang vektor

   a. $|\vec{a}| = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}$

   b. Jika P (a_1, a_2, a_3) dan Q (b_1, b_2, b_3) maka

   $$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + (b_3 - a_3)}$$

4. Perbandingan

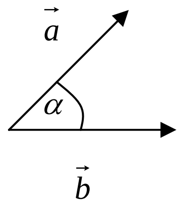


$$\vec{p} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m + n}$$

$\vec{a}$, $\vec{p}$ dan $\vec{b}$ adalah vektor-vektor posisi dari titik A, B dan P

D. Perkalian Skalar dua Vektor

$$\vec{a}\,.\,\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos\alpha$$



α menyatakan sudut yang dibentuk oleh vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$

Jika $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ maka

$$\vec{a}\,.\,\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

E. Besar sudut antara dua Vektor

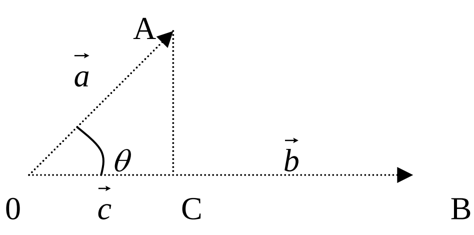
$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$$

$$= \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + a_3^{\ 2}}.\sqrt{b_1^{\ 2} + b_2^{\ 2} + b_3^{\ 2}}} \ ; \ 0 \le \alpha \le 180^0$$

F. Proyeksi Ortogonal suatu vektor pada vektor :

Salah satu kegunaan dari perkalian scalar adalah untuk menentukan proyeksi ortogonal dari suatu vektor pada vector lain

1. **Proyeksi skalar ortogonal**



$|\overrightarrow{OC}| = |\vec{c}| = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|}$ → Proyeksi skalar ortogonal $\vec{a}$ pada $\vec{b}$

Proyeksi skalar juga disebut panjang proyeksi

2. **Proyeksi vektor ortogonal**

Proyeksi vektor ortogonal $\vec{a}$ pada $\vec{b}$ adalah :

$$|\vec{c}| = \left(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right).\,\vec{b}$$

Proyeksi vektor juga disebut vector poyeksi

G. Rumus-rumus tambahan :

1. $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{2(a^2 + b^2) - |\vec{a} - \vec{b}|^2}$

bukti :

$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = a^2 + b^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$

$\Leftrightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{a^2 + b^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha}$ ….(1)

$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = a^2 + b^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$

$\Leftrightarrow 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha = a^2 + b^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2$ …(2)

Substitusi (2) ke (1)

$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{a^2 + b^2 + a^2 + b^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2}$

$= \sqrt{2(a^2 + b^2) - |\vec{a} - \vec{b}|^2}$

2. $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{2(a^2 + b^2) - |\vec{a} + \vec{b}|^2}$

bukti :

$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = a^2 + b^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$

$\Leftrightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{a^2 + b^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha}$ ….(1)

$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = a^2 + b^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$

$\Leftrightarrow -2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha = a^2 + b^2 - |\vec{a} + \vec{b}|^2$ …(2)

Substitusi (2) ke (1)

$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{a^2 + b^2 + a^2 + b^2 - |\vec{a} + \vec{b}|^2}$

$= \sqrt{2(a^2 + b^2) - |\vec{a} + \vec{b}|^2}$